Université de Tuléar
Faculté de Droit, d'Économie,de Gestion et de Sociologie
Département Économie
3e Année

TD. Macroéconomie appliquée : Développement & Croissance

Comprendre le PIB : principale mesure de la croissance économique

Si on appelle Valeur Ajoutée la différence entre la production P en valeur d'une entreprise et le montant des Consommations Intermédiaires CI, on peut écrire :

VA d'une entreprise = P - CI = contribution de l'entreprise à la richesse finale

Du point de vue de la Comptabilité Nationale, on écrit :

PIB au prix du marché = ∑VA + TVA + Droits de douane

La mesure de l'activité économique d'un pays, et donc le PIB, repose sur la constitution de ses comptes nationaux. Ces derniers montrent que l'activité économique, durant une période de temps, peut être mesurée en termes de :

1. quantité de biens produits, à l'exclusion de celle utilisée dans les étapes intermédiaires de la production (à savoir CI) : on parle d'une approche par le produit.
2. revenus touchés par les producteurs : approche par le revenu.
3. ce qui est dépensé par les acheteurs ultimes de la production : approche par la dépense.

Pour comprendre cette définition, on peut se référer à l'exercice suivant.

Exercice 1.

Durant une année donnée, les activités suivantes se déroulent :

• *Une compagnie minière paie ses ouvriers 75 000 € pour extraire 50 tonnes de minerais, qu'elle vend à une fabrique de bijoux pour 100 000 €.*

• *La fabrique de bijoux paye ses ouvriers 50 000 € pour fabriquer des colliers, qu'elle vend directement aux ménages, pour une valeur de 400 000 €.*

a) En utilisant l'approche « productions de biens finaux », calculez la valeur du PIB.

b) Quelle est la valeur ajoutée à chaque stade de production ? Calculez la valeur du PIB selon cette approche.

c) Quelles sont les salaires et profits totaux dégagés par l'activité ? En utilisant l'optique « revenu », calculez la valeur du PIB.

Réponses exercice 1

a) En utilisant l'approche production de biens finaux, la valeur du PIB est :
PIB = CF + FBCF + ΔS
PIB = 400 000 + 0 + 0
PIB = 400 000

b) La valeur ajoutée à chaque stade de production est la différence entre la production finale et la consommation intermédiaire vu que cette économie ne prend pas en compte des TVA et droits de douanes. D'où la valeur du PIB selon cette approche est la somme des valeurs ajoutées de deux secteurs :

VA = (P – CI)1 + (P - CI)2
VA = (100 000 – 0) + (400 000 – 100 000)
VA = 400 000
PIB = ΣVA + TVA + Droits de douane
PIB = 400 000

c) Les salaires totaux dégagés par les activités sont :
Salaire = 75 000 + 50 000 = 125 000

Et les profits dégagés par les activités sont les revenus touchés par les producteurs :
Profit = VAB – RS
Profit = 400 000 – 125 000
Profit = 275 000
D'où le PIB qu'est la somme des revenus touchés par les producteurs est :
PIB = RS + IP + EBE (profit)
PIB = 125 000 + 275 000
PIB = 400 000

Comprendre la différence entre prix courant et prix constant

Les prix courants sont les prix tels qu'ils sont indiqués à une période donnée, ils sont dits en valeur nominale.

Les prix constants sont les prix en valeur réelle càd corrigés de la hausse des prix par rapport à une donnée de base ou de référence.

– Le calcul à prix courants : le PIB en valeur ou PIB nominal

Le PIB d'une année donnée est évalué aux prix de la même année. Le PIB en 2007 en euro courants est égal à la quantité des biens et services produits en 2007 multiplié par le prix des biens et services en 2007.

$PIB_{nominal} = Q_{2007} . P_{2007}$

– Le calcul à prix constants : le PIB réel

Ce calcul élimine le biais inflationniste entre deux périodes, en cela il mesure « l'enrichissement » effectif ou réel de la nation. La méthode consiste à mesurer le PIB d'une année quelconque, par exemple 2008, en le valorisant au prix d'une autre année fixée comme année de référence, 1980 par exemple. L'année de référence en question peut être l'année précédente, 5 ans, 10 ans avant....

$PIB_{réel\ 2008\ prix\ 1980} = Q_{2008}.P_{1980}$

– L 'indice de prix du PIB : le prix implicite du PIB ou le déflateur du PIB

Le déflateur du PIB est égal au rapport du PIB en valeur de l'année t au PIB réel de l'année t−1.

$$Indice\ de\ prix = \frac{PIB\ en\ valeur\ 1982}{PIB\ réel\ 1982\ au\ prix\ de\ 1981} = \frac{Q1982\ P1982}{Q1982\ P1981}$$

Exercice 2.

On considère une économie dans laquelle on produit trois biens A, B et C en années N et N+1, selon les quantités et les prix suivants :

	N	N	N+1	N+1
	Qté	Prix	Qté	Prix
A	100	10	110	10
B	200	1	200	1,5
C	500	0,5	450	1

1. Calculer le PIB nominal en N et en N+1.
2. En utilisant N comme année de base, calculer le PIB réel en N et en N+1. De quel pourcentage ce PIB réel a-t-il évolué entre N et N+1 ?
3. Mêmes questions en utilisant maintenant N+1 comme année de base. Commentez vos résultats, en les comparant à ceux de la question précédente.
4. En prenant N comme année de base, calculez le déflateur du PIB en N et en N+1, puis le taux d'inflation sur la période.

Réponses exercice 2

1) Calcul du PIB nominal en N et en N+1 :

PIB nominal (N) = Q_N P_N
Pour A : PIB nominal (N) = 1 000
Pour B : PIB nominal (N) = 200
Pour C : PIB nominal (N) = 250
D'où :
PIB nominal (N) = 1 450

PIB nominal (N+1) = Q_{N+1} P_{N+1}
Pour A : PIB nominal (N+1) = 1 100
Pour B : PIB nominal (N+1) = 300
Pour C : PIB nominal (N+1) = 450
PIB nominal (N+1) = 1 850

2) En utilisant N comme année de base, calcul du PIB réel en N et en N+1 :

PIB réel $(N)_{\text{année de base N}}$ = Q_N P_N
Pour A : PIB réel $(N)_{\text{année de base N}}$ = 1 000
Pour B : PIB réel $(N)_{\text{année de base N}}$ = 200
Pour C : PIB réel $(N)_{\text{année de base N}}$ = 250
D'où :
PIB réel $(N)_{\text{année de base N}}$ = 1 450

PIB réel $(N+1)_{\text{année de base N}}$ = Q_{N+1} P_N
Pour A : PIB réel $(N+1)_{\text{année de base N}}$ = 1 100
Pour B : PIB réel $(N+1)_{\text{année de base N}}$ = 200
Pour C : PIB réel $(N+1)_{\text{année de base N}}$ = 225
PIB réel $(N+1)_{\text{année de base N}}$ = 1 525

Le taux d'évolution du PIB réel entre N et N+1 est de 5,17 %.

3) En utilisant N+1 comme année de base, calcul du PIB réel en N et en N+1 :

PIB réel $(N)_{\text{année de base N+1}}$ = Q_N P_{N+1}
Pour A : PIB réel $(N)_{\text{année de base N+1}}$ = 1000
Pour B : PIB réel $(N)_{\text{année de base N+1}}$ = 300
Pour C : PIB réel $(N)_{\text{année de base N+1}}$ = 500
D'où :
PIB réel $(N)_{\text{année de base N+1}}$ = 1 800

PIB réel $(N+1)_{\text{année de base N+1}}$ = Q_{N+1} P_{N+1}
Pour A : PIB réel $(N+1)_{\text{année de base N+1}}$ = 1 100
Pour B : PIB réel $(N+1)_{\text{année de base N+1}}$ = 300
Pour C : PIB réel $(N+1)_{\text{année de base N+1}}$ = 450
PIB réel $(N+1)_{\text{année de base N+1}}$ = 1 850

Le taux d'évolution du PIB réel entre N et N+1 est de 2,77%.

En utilisant l'année N+1 comme année de référence pour le calcul du PIB réel, le taux de croissance a diminué presque de moitié, du à une hausse des prix.

4) En prenant N comme année de base, calcul du déflateur du PIB en N et en N+1 :
$IPC_{N+1} = Q_{N+1} P_{N+1} / Q_{N+1} P_N$
Pour A : IPC_{N+1} = 1 100 / 1 100 = 1
Pour B : IPC_{N+1} = 300 / 200 = 1,5
Pour C : IPC_{N+1} = 450 / 225 = 2
D'où : IPC_{N+1} = 4,5

D'où, le taux d'inflation est de

Exercice 3.

Supposons qu'un pays ne produise que des voitures et de l'acier. Les quantités et les prix en 2007, 2008 et 2009 sont respectivement les suivantes :

Année	Nombre de voitures produites	Prix des voitures	Quantité d'aciers produits	Prix de l'acier
2007	50000	50000	2000000	1500
2008	60000	55000	2500000	1530
2009	63000	55000	2600000	1350

1. Calculer la valeur totale de la production en 2007, 2008 et 2009.
2. Calculer la valeur de production de 2007 au prix de 2008.
3. Comparer l'évolution de la production en volume avec celle en valeur entre 2007 et 2008, expliquer la différence.

Réponses Exercice 3

1) Calcul de la valeur totale de la production en 2007, 2008 et 2009 :
VN 2007 = (50 000 * 50 000) + (2 000 000 * 1 500)
VN 2007 = 5 500 000 000

VN 2008 = 7 125 000 000

VN 2009 = 6 975 000

2) calcul de la valeur de production de 2007 au prix de 2008 :
VN 2007 (P2008) = (50 000 * 55 000) + (2 000 000 * 1 530)
VN 2007 (P2008) = 2 810 000 000

3) Même si la production en valeur entre 2007 et 2008 augmente due à l'augmentation du niveau des prix pour les deux types de biens, la production en volume est faible, car déflatée de prix.

Exercice 4.

Soit une économie à prix fixe, dans laquelle les ménages disposent de l'ensemble du revenu de la production y, soit sous forme de salaires, soit sous forme de dividendes. Ils paient un impôt proportionnel à leur revenu, selon un taux d'imposition t = 0, 25 et ils consomment un volume de biens tel que: $c(y_d, r) = 0,8y_d - 10r$*, où r est le taux d'intérêt domestique et* y_d *le revenu* *disponible après impôts.*

1. *Interprétez les différents paramètres.*
2. *Écrire la fonction de consommation en fonction du revenu brut.*

Réponses exercice 4

1) Interprétation des différents paramètres :
$c(y_d, r) = 0,8y_d - 10r$
C'est l'équation de la consommation c en fonction du revenu disponible y_d et de l'investissement qui varie négativement avec les taux d'intérêt r. Notons a le premier paramètre avec a = 0,8 et b le second avec b = -10. En fait, en supposant que toutes choses égales par ailleurs (*ceteris paribus càd qu'on admet que les paramètres des équations restent constants et on raisonne comme si rien ne changeait sauf indication contraire*), une hausse supplémentaire d'une unité de revenu national induit une hausse de 0,8 unité de la consommation selon le premier paramètre. Avec la même hypothèse, pour le second paramètre, plus les taux d'intérêt augmentent, les agents économiques renoncent à la consommation pour pouvoir épargner plus.

2) La fonction de consommation en fonction du revenu brut :
Soit y_d le revenu disponible après impôt càd le revenu net
$y = y_d * t$ le revenu brut
$c(y , r) = 0,8 * 0,25y - 10r$
c(y , r) = 0,2 y - 10r

Exercice 5.

On considère une économie fermée, dont les caractéristiques sont :

- *Propension marginale à consommer : c=0, 7*
- *Consommation incompressible : C_0 =700 1 500*
- *Dépenses publics : G=1 000*
- *Taxes : T =1 000*

1. *Écrire la fonction de consommation*
2. *A partir de l'équilibre ressources/emploi, vérifiez que le produit national à l'équilibre est égal à 5 000. Calculer le solde budgétaire.*
3. *Évaluer le déficit budgétaire à consentir par l'État si celui-ci se propose d'atteindre le plein emploi qui est Y_{PE} = 5 500 en relançant les dépenses publiques sans augmentation des recettes fiscales. Décrivez les relations du mécanisme.*

Réponses exercice 5

1) La fonction de consommation :
C = 0,7 Y + 1 500

2) A partir de l'équilibre ressources-emplois, vérifions que le produit national à l'équilibre est égal à 5 000 :
Comme c'est une économie fermée, l'équilibre ressources-emplois s'écrit :
Y = C + I + (T - G)
Y = (0,7 Y + 1 500) + (1 000 – 1 000)
Y – 0,7 Y = 1 500
Y = 1 500 / 0,3
Y = 5 000

Calcul du solde budgétaire : c'est la différence entre les recettes et les dépenses publiques qui est égale à 0. Cela évoque un équilibre budgétaire.

3) Évaluation du déficit budgétaire à consentir par l'État si celui-ci se propose d'atteindre le plein emploi qui est Y_{PE} = 5 500 en relançant les dépenses publiques sans augmentation des recettes fiscales :

$Y_{PE} = (0{,}7Y_{PE} + 1\,500) + (T - G)$
$0{,}3\ Y_{PE} - 1\,500 = (T - G)$
$0{,}3 * 5\,500 - 1\,500 = (T - G)$
$(T - G) = 150$

Pour atteindre un niveau de production de plein-emploi de 5 500, l'Etat enregistrerait un déficit publique de 150 sans devoir augmenter les recettes fiscales.

Exercice 6.

Soit les 6 dernières années, les données (mesurés en milliards d'euro) du tableau ci-dessous :

Années	Consommation	Revenu disponible
1	450	500
2	458	510
3	466	520
4	474	530
5	482	540
6	490	550

a) Définir les notions de propension marginale et moyenne à consommer. Calculer-les pour chacune des années.
b) Dans quelle mesure les résultats ci-dessus confirment-ils les hypothèses de la fonction de consommation keynésienne ?
c) Donnez l'expression algébrique de cette fonction sachant que la fonction de consommation keynésienne est de la forme $c = a * y + c_0$.

Réponses exercice 6

a) La propension moyenne à consommer est la part du revenu consacrée à la consommation noté : pmc = C /Y
La propension marginale à consommer est la part d'une unité de revenu supplémentaire consacrée à la consommation, càd le rapport entre la variation de la consommation et la variation du revenu : c = ΔC / ΔY

Calcul de pmc et c durant la période d'étude :

Années	C	Y	pmc = C / Y	c = ΔC / ΔY
1	450	500	0,9	0,9
2	458	510	0,89	0,8
3	466	520	0,89	0,8

4	474	530	0,89	0,8
5	482	540	0,89	0,8
6	490	550	0,89	0,8

b) Les résultats ci-dessus confirment les hypothèses de la fonction de consommation keynésienne dans la mesure où les propensions à consommer sont stables durant la période d'analyse même si les revenus n'ont pas cessé d'augmenter et les consommations aussi d'ailleurs.

c) L'expression algébrique de cette fonction sachant que la fonction de consommation keynésienne est de la forme $c = a * y + c_0$:
Soit $c_i = a * y_i + c_0$ où a = constante quel que soit i = 1,...,n

Exercice 7.

On considère une économie dont la fonction de consommation linéaire est de la forme suivante, $c = 50 + 0,75\ y_d$.

a) Calculer et interpréter dans un tableau, les montants des dépenses de consommation pour les valeurs suivantes du revenu disponible y_d : 0, 200, 400, 600, 1 000, 1 200, 1 400, 1 600, 1 800, 2 000.
b) Déduisez les montants de l'épargne pour les mêmes valeurs de revenu disponible.
c) Calculer les propensions moyennes à consommer et à épargner pour les différentes valeurs du revenu disponible, commentez.

Réponses exercice 7

a) b) c) Les réponses à ces questions sont présentées dans le tableau suivant avec une fonction de consommation :
$c = 50 + 0,75\ y_d$.

y_d	c	s	pmc = c / y_d	pms = s / y_d
0	50	-50	∞	-∞
200	200	0	1	0
400	350	50	0,88	0,13
600	500	100	0,83	0,16
1000	800	200	0,8	0,2
1200	950	250	0,79	0,21
1400	1100	300	0,78	0,21
1600	1250	350	0,78	0,22
1800	1400	400	0,77	0,22
2000	1550	450	0,77	0,22

Il est vérifié que les agents ne peuvent pas épargner si leur revenu après impôt est nul même s'ils continuent à consommer infiniment.
Les propension à consommer et à épargner sont constantes même si les revenus augmentent et évidemment les consommations.
Il est, enfin, vérifié que la somme entre pmc et pms est égale à l'unité.

Exercice 8.

Soit une économie dont le revenu disponible y_d = 400 et la consommation c =350.

1. *Déduisez l'épargne.*
2. *Si le revenu avant impôt était de 620, quel serait le montant de l'impôt ?*
3. *Calculer le solde budgétaire.*
4. *Calculer le PNB si le PNF est de 35.*
5. *Quel serait le montant des transferts reçu si le revenu gouvernemental net était de 150.*
6. *L'impôt forfaitaire en 2 est remplacé par une fonction d'imposition t = 0, 2 * y_d, calculer le niveau de consommation compatible avec un montant de recette fiscale de 80, sachant que le montant des investissements s'élève à 75.*

Réponses exercice 8

Revenu disponible y_d = 400 et consommation c =350.

1) Calcul de l'épargne :
$s = y_d - c$
s = 50

2) Si le revenu avant impôt était de 620, le montant de l'impôt est : T = 220.

3) Le solde budgétaire est :
T – G = 220 – G
G = 220

I- Modèle trisectoriel.

Exercice 1. Soit une économie trisectorielle avec :
$C = 100 + 0,90Y_d$; $I_0 = 80$ (tout est en milliards d'euros).

1) **Calculer le revenu d'équilibre en passant par l'équation des dépenses, puis en passant par l'équation épargne-investissement.**
2) **L'investissement autonome augmente de 20 milliards d'euros. Calculer le nouveau revenu d'équilibre et le multiplicateur d'investissement.**

Supposons que l'État opte pour des dépenses publiques de 20 milliards d'euros de sorte que : $C = 100 + 0,90Y_d$; $I_0 = 80$; $G_0 = 20$.

3) **Calculer le revenu d'équilibre en passant par l'équation des dépenses, puis en passant par l'équation épargne-investissement.**
4) **Calculer le multiplicateur des dépenses publiques.**

Supposons que l'État soit dans l'obligation de couvrir ses dépenses par des impôts d'égale valeur de sorte que $C = 100 + 0,90Y_d$; $I_0 = 80$; $G_0 = 20$; $T_0 = 20$.

5) **Calculer le revenu d'équilibre en passant par l'équation des dépenses, puis en passant par l'équation épargne-investissement.**
6) **Calculer le multiplicateur des recettes fiscales.**
7) **Commenter les résultats.**

L'État intervient avec deux activités principales : Il dépense G, appelé aussi dépenses publiques ou gouvernementales) et il prélève T (les prélèvements obligatoires qu'on réduit aux seules recettes fiscales, la taxation).

Q.1. Calculer le revenu d'équilibre en passant par l'équation des dépenses, puis en passant par l'équation épargne-investissement.

- Pas d'impôt $\Leftrightarrow Y_d = Y$
- Équation des dépenses :
  $$Y = C + I \Leftrightarrow Y^* = \frac{1}{1-c}(C_0 + I_0) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 1 - c = 1 - 0,90 = 0,10 \\ C_0 + I_0 = 100 + 80 = 180 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow Y^* = \frac{180}{0,10} = 1\,800.$$
- Équation épargne-investissement :
  $$\begin{Bmatrix} S = -C_0 + (1-c)Y_d = -100 + 0,10Y_d \\ I = 80 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} S = I \\ -100 + 0,10Y = 80 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow 180 = 0,10Y \Leftrightarrow$$
  $$Y^* = \frac{180}{0,10} = 1\,800.$$

Q.2. L'investissement autonome augmente de 20 milliards d'euros. Calculer le nouveau revenu d'équilibre et le multiplicateur d'investissement.

- Revenu d'équilibre : $\begin{Bmatrix} I_0 = 80 + \Delta I = 80 + 20 = 100 \\ D_0 = C_0 + I_0 = 100 + 100 = 200 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow Y'^* = \frac{200}{0,10} = 2\,000.$
- Multiplicateur : $\begin{Bmatrix} \Delta I = 20 \\ \Delta Y = Y'^* - Y^* = 2\,000 - 1\,800 = 200 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow K_I = \frac{\Delta Y}{\Delta I} = \frac{200}{20} = 10 = \frac{1}{1-c}$

Q.3. Calculer le revenu d'équilibre en passant par l'équation des dépenses, puis en passant par l'équation épargne-investissement.

- Pas d'impôt $\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} Y_d = Y \\ D_0 = C_0 + I_0 + G_0 = 100 + 80 + 20 = 200 \end{Bmatrix}$
- Équation des dépenses :

$Y = C + I + G \Leftrightarrow Y^* = \frac{1}{1-c}(C_0 + I_0 + G_0) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 1 - c = 1 - 0{,}90 = 0{,}10 \\ C_0 + I_0 + G_0 = 200 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow Y^* = \frac{200}{0{,}10} =$ 2 000.

- Équation épargne-investissement :

$$\begin{Bmatrix} S = -C_0 + (1-c)Y_d = -100 + 0{,}10Y_d \\ I = 80 \\ G = 20 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} S = I + G \\ -100 + 0{,}10Y = 80 + 20 = 100 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow 200 = 0{,}10Y \Leftrightarrow Y^* = \frac{200}{0{,}10} = 2\,000.$$

Q.4. Calculer le multiplicateur des dépenses publiques.

$$\begin{Bmatrix} \Delta G = 20 \\ \Delta Y = Y'^* - Y^* = 2\,000 - 1\,800 = 200 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow K_G = \frac{\Delta Y}{\Delta G} = \frac{200}{20} = 10 = \frac{1}{1-c} = K_I$$

Q.5. Calculer le revenu d'équilibre en passant par l'équation des dépenses, puis en passant par l'équation épargne-investissement.

- $Y_d = Y - T_0$.
- Équation des dépenses :

$$\begin{Bmatrix} Y = C + I + G \\ C = C_0 + 0{,}90\,(Y - T_0) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow Y^* = \frac{1}{1-c}(C_0 + I_0 + G_0 - cT_0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} 1 - c = 1 - 0{,}90 = 0{,}10 \\ C_0 + I_0 + G_0 = 200 \\ cT_0 = 0{,}90 \times 20 = 18 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} D_0 = 200 - 18 = 182 \\ Y^* = \frac{182}{0{,}10} = 1\,820 \end{Bmatrix}.$$

- Équation épargne-investissement :

$$\begin{Bmatrix} S = -C_0 + (1-c)Y_d = -100 + 0{,}10Y_d \\ I = 80 \\ G = 20 \\ T = 20 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} S + T = I + G \\ -100 + 0{,}10(Y - 20) + 20 = 100 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow 200 - 20 = 0{,}10Y - 2 \Leftrightarrow 180 + 2 = 0{,}10Y \Leftrightarrow 182 = 0{,}10Y \Leftrightarrow Y^* = \frac{182}{0{,}10} = 1\,820.$$

Q.6. Calculer le multiplicateur des recettes fiscales.

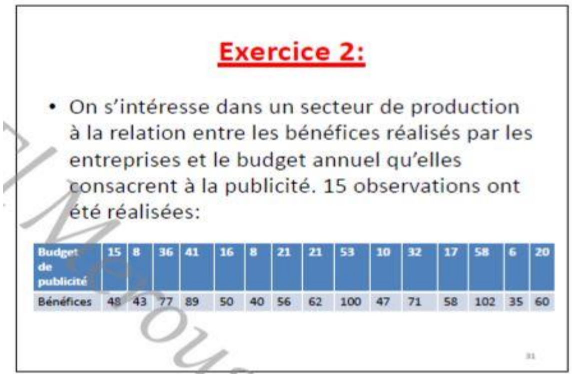
$$\begin{Bmatrix} \Delta T = 20 \\ \Delta Y = Y'^* - Y^* = 1\,820 - 2\,000 = -180 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow K_T = \frac{\Delta Y}{\Delta T} = \frac{-180}{20} = -9 = \frac{-c}{1-c}$$

Q.7. Commenter les résultats.

- Le multiplicateur d'investissement (autonome) a la même valeur que celui des dépenses publiques, les deux font changer le revenu dans le même sens.
- Le multiplicateur des recettes fiscales provoque une moindre sensibilité du revenu et dans un sens opposé.
- Une intervention de l'État en prélevant des impôts et en dépensant la même somme fait augmenter le revenu qui passe de 1 800 à 1 820.

Exercices économétrie :

Résolution manuelle

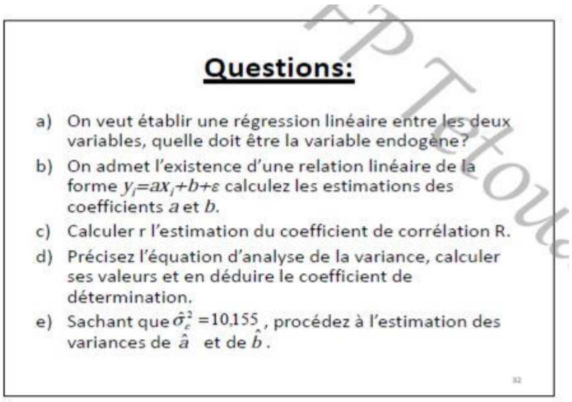


Exercice 2:

- On s'intéresse dans un secteur de production à la relation entre les bénéfices réalisés par les entreprises et le budget annuel qu'elles consacrent à la publicité. 15 observations ont été réalisées:

Budget de publicité	15	8	36	41	16	8	21	21	53	10	32	17	58	6	20
Bénéfices	48	43	77	89	50	40	56	62	100	47	71	58	102	35	60

31



Questions:

a) On veut établir une régression linéaire entre les deux variables, quelle doit être la variable endogène?
b) On admet l'existence d'une relation linéaire de la forme $y_i = ax_i + b + \varepsilon$ calculez les estimations des coefficients a et b.
c) Calculer r l'estimation du coefficient de corrélation R.
d) Précisez l'équation d'analyse de la variance, calculer ses valeurs et en déduire le coefficient de détermination.
e) Sachant que $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 10{,}155$, procédez à l'estimation des variances de $\hat{a}$ et de $\hat{b}$.

32

Questions: (suite)

f) Déterminez au seuil de signification de 0,05 , un intervalle de confiance pour a, un intervalle de confiance pour b, et un intervalle de confiance pour $\hat{\sigma}_e^2$.

g) Peut-on affirmer que les coefficients a et b sont significativement différents de 0 pour α=0,05?

h) Déterminez un intervalle de confiance pour le bénéfice prévisible relatif à une entreprise qui consacre un budget de 48 à son programme publicitaire. (α=0,05).

33

Solution 2:

a) La variable endogène Y correspond aux bénéfices qui sont exprimés en fonction du budget de publicité X.

b) Voir tableau...

$$\hat{a} = \frac{\sum(X_iY_i) - n\overline{X}\overline{Y}}{\sum(X_i^2) - n\overline{X}^2}$$

$$\hat{b} = \overline{Y} - \hat{a}\overline{X}$$

34

X_i	Y_i	X_i^2	Y_i^2	X_iY_i
15	48	225	2304	720
8	43	64	1849	344
36	77	1296	5929	2772
41	89	1681	7921	3649
16	50	256	2500	800
8	40	64	1600	320
21	56	441	3136	1176
21	62	441	3844	1302
53	100	2809	10000	5300
10	47	100	2209	470
32	71	1024	5041	2272
17	58	289	3364	986
58	102	3364	10404	5916
6	35	36	1225	210
20	60	400	3600	1200
362	938	12490	64926	27437

35

$$n = 15$$

$$\overline{X} = \frac{362}{15} = 24{,}13 \Rightarrow \overline{X}^2 = 582{,}26$$

$$\overline{Y} = \frac{938}{15} = 62{,}53$$

$$\hat{a} = \frac{27437 - 15\times 24{,}13\times 62{,}53}{12490 - 15\times 582{,}26} = 1{,}28$$

$$\hat{b} = 62{,}53 - 1{,}28\times 24{,}13 = 31{,}67$$

$$\hat{Y} = 1{,}28X + 31{,}67$$

36

X_i	Y_i	$X_i-\overline{X}$	$(X_i-\overline{X})^2$	$Y_i-\overline{Y}$	$(Y_i-\overline{Y})^2$	$\hat{Y}_i$	$\hat{Y}_i-\overline{Y}$	$(\hat{Y}_i-\overline{Y})^2$	$\hat{Y}_i-Y_i$	$(\hat{Y}_i-Y_i)^2$
15	48	-9,13	83,36	-14,53	211,12	50,87	-11,66	135,96	2,87	8,24
8	43	-16,13	260,18	-19,53	381,42	41,91	-20,62	425,18	-1,09	1,19
36	77	11,87	140,90	14,47	209,38	77,75	15,22	231,65	0,75	0,56
41	89	16,87	284,60	26,47	700,66	84,15	21,62	467,42	-4,85	23,52
16	50	-8,13	66,10	-12,53	157,00	52,15	-10,38	107,74	2,15	4,62
8	40	-16,13	260,18	-22,53	507,60	41,91	-20,62	425,18	1,91	3,65
21	56	-3,13	9,80	-6,53	42,64	58,55	-3,98	15,84	2,55	6,50
21	62	-3,13	9,80	-0,53	0,28	58,55	-3,98	15,84	-3,45	11,90
53	100	28,87	833,48	37,47	1404,00	99,51	36,98	1367,52	-0,49	0,24
10	47	-14,13	199,66	-15,53	241,18	44,47	-18,06	326,16	-2,53	6,40
32	71	7,87	61,94	8,47	71,74	72,63	10,1	102,01	1,63	2,66
17	58	-7,13	50,84	-4,53	20,52	53,43	-9,1	82,81	-4,57	20,88
58	102	33,87	1147,18	39,47	1557,88	105,91	43,38	1881,82	3,91	15,29
6	35	-18,13	328,70	-27,53	757,90	39,35	-23,18	537,31	4,35	18,92
20	60	-4,13	17,06	-2,53	6,40	57,27	-5,26	27,67	-2,73	7,45
362	938		3753,73		6269,73			6150,13		132,01

37

c)

$$R = \frac{\sum(X_iY_i) - n\overline{X}\overline{Y}}{n\sigma_X\sigma_Y}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(X_i - \overline{X})^2} = \sqrt{\frac{3753{,}73}{15}} = 15{,}82$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(Y_i - \overline{Y})^2} = \sqrt{\frac{6269{,}73}{15}} = 20{,}44$$

$$R = 0{,}989$$

38

d) Dispersion totale:

$$\sum(Y_i-\overline{Y})^2=6269{,}73$$

Dispersion expliquée:

$$\sum(\hat{Y}_i-\overline{Y})^2=6150{,}13$$

Dispersion résiduelle:

$$\sum(Y_i-\hat{Y}_i)^2=132{,}01$$

6269,73=6150,13+132,01

39

- Le coefficient de détermination est:

$$R^2=\frac{6137{,}72}{6269{,}73}=0{,}9789$$

- Ce coefficient est proche de 1, on peut en déduire que la variabilité expliquée par droite de régression est satisfaisante.

40

e) On a $\hat{\sigma}_\varepsilon^2=10{,}155$

Alors,

$$S_{\hat{a}}^2=Var(\hat{a})=\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sum(X_i-\overline{X})^2}=0{,}0027$$

et

$$Var(\hat{b})=\hat{\sigma}_\varepsilon^2\left[\frac{1}{n}+\frac{\overline{X}^2}{\sum(X_i-\overline{X})^2}\right]=2{,}2526$$

41

f) Intervalle de confiance pour $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$

La variable $\frac{\sum\hat{\varepsilon}_i^2}{\sigma_\varepsilon^2}=(n-2)\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2}$ suit une loi χ^2 à (n-2) degrés de liberté.

Donc, on part de $P\left(A<(n-2)\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2}<B\right)=1-\alpha$

L'intervalle de confiance pour $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ est alors:

$$I=\left[(n-2)\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{B};(n-2)\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{A}\right]=[5{,}336;26{,}35]$$

42

- L'intervalle pour a: $\left[\hat{a}-t_{1-\alpha}\hat{\sigma}_{\hat{a}};\hat{a}+t_{1-\alpha}\hat{\sigma}_{\hat{a}}\right]$ avec t lue sur la table de Student à $n-2=13$ degré de liberté. ($t=2,16$).

  $I=[1{,}166;\ 1{,}391]$

- Intervalle pour b: $\left[\hat{b}-t_{1-\alpha}\hat{\sigma}_{\hat{b}};\hat{b}+t_{1-\alpha}\hat{\sigma}_{\hat{b}}\right]$

  $I=[28{,}432;\ 34{,}916]$

43

g) Le t empirique de Student est donné par $\frac{\hat{a}}{\hat{\sigma}_{\hat{a}}}$, on compare la valeur de ce rapport avec $t=2,16$.

On trouve qu'il est supérieur en valeur absolue à $2,16$ pour les deux paramètres a et b.

Donc ces paramètres sont significativement différents de 0. La variable exogène contribue bien à expliquer Y.

$$P(-2{,}16<t_{(13)}<2{,}16)=0{,}95$$

44

h)

$$I_{(Y_0)} = \left[(ax_0 + b) - t_{1-\alpha} S \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\sum x^2}\right)} ; (ax_0 + b) + t_{1-\alpha} S \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\sum x^2}\right)} \right]$$

$$I_{(Y_{48})} = [(1{,}28 \times 48 + 31{,}67) - 2{,}16 \times 12{,}335 ; (1{,}28 \times 48 + 31{,}67) + 2{,}16 \times 12{,}335]$$

$$I_{(Y_{48})} = [85{,}45 ; 100{,}65]$$

45

Résolution sur logiciel

Modèle 2: MCO, utilisant les observations 2000-2014 (T = 15)
Variable dépendante: Y

	Coefficient	*Erreur Std*	*t de Student*	*p. critique*	
const	31,6738	1,50087	21,10	<0,0001	***
X	1,27871	0,0520125	24,58	<0,0001	***

Moy. var. dép.	62,53333	Éc. type var. dép.	21,16219
Somme carrés résidus	132,0144	Éc. type de régression	3,186684
R2	0,978944	R2 ajusté	0,977324
F(1, 13)	604,4062	p. critique (F)	2,77e-12
Log de vraisemblance	−37,59554	Critère d'Akaike	79,19107
Critère de Schwarz	80,60717	Hannan-Quinn	79,17599
rho	−0,310451	Durbin-Watson	2,466194